



TITLE:

b 関数の q 類似 (概均質ベクトル空間の研究)

AUTHOR(S):

紙田, 敦史

CITATION:

紙田, 敦史. b 関数の q 類似 (概均質ベクトル空間の研究). 数理解析
研究所講究録 2001, 1238: 49-62

ISSUE DATE:

2001-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/41573>

RIGHT:

b 関数の q 類似

紙田敦史 (広島大理)

Atsushi KAMITA (Hiroshima University)

§0. Introduction

可換放物型と呼ばれる概均質ベクトル空間 (L, V) はある単純 Lie 代数 \mathfrak{g} の内部に実現され, 表現論と密接な関係があり, 特に b 関数は既約性などとの関係がある ([18] など). (L, V) に対して, その座標環 $A(V)$ の q 類似 $A_q(V)$ が \mathfrak{g} の量子包絡環 $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数として構成された (広島大の谷崎氏, 森田氏との共同研究 [8]). ここで座標環の q 類似とは次をみたすものとする:

- (i) V_q^* を生成元とし, 二次の斉次関係式をもつ $\mathbb{C}(q)$ 代数.
- (ii) $q \rightarrow 1$ のとき $A_q(V) \rightarrow A(V)$.
- (iii) $A_q(V)$ の $U_q(\mathfrak{l})$ 加群の構造は V_q^* 上の作用と $U_q(\mathfrak{l})$ の Hopf 代数の構造により決まる.

ただし $U_q(\mathfrak{l})$ は L の Lie 代数の量子包絡環であり, V_q^* は V の双対空間に対応する $U_q(\mathfrak{l})$ 加群である. [8] における $A_q(V)$ の構成は (L, V) が正則の場合には基本相対不変式の q 類似の構成法も含まれている. ここで得られた q 類似 $A_q(V)$ は [3], [15], [17], [19] により研究された非可換代数と同じものである.

本稿の目的は (L, V) の基本相対不変式 f に対応する b 関数の q 類似を構成し, その形を具体的に表すことである. b 関数 $b(s)$ は (L, V) の双対空間 (L, V^*) の相対不変式 ${}^t f$ に対応する定数係数微分作用素 ${}^t f(\partial)$ により ${}^t f(\partial)f^{s+1} = b(s)f^s$ で定義される. 主結果は次である:

f の q 類似 f_q に対し線形写像 ${}^t f_q(\partial)$ が $A_q(V)$ 上の自然な非退化対称形式を用いて定義され, 量子 b 関数 $b_q(s)$ を

$${}^t f_q(\partial)f_q^{s+1} = b_q(s)f_q^s \quad (s \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

により定めることができ, $b(s) = \prod_j (s + a_j)$ のとき $b_q(s)$ は (定数倍を除いて)

$$b_q(s) = \prod_j q_0^{s+a_j-1} [s + a_j]_{q_0}$$

となる. ただし \mathfrak{g} が B, C 型のときは $q_0 = q^2$, その他のときは $q_0 = q$ であり, $[n]_{q_0} = \frac{q_0^n - q_0^{-n}}{q_0 - q_0^{-1}}$ である.

これは各 type 毎に計算することにより得られたものである. なお A 型に対する b 関数の q 類似については Capelli identity の q 類似による結果 [14] がある.

§1. 可換放物型概均質ベクトル空間

\mathfrak{g} を複素数体 \mathbb{C} 上の単純 Lie 代数とし, \mathfrak{h} をその Cartan 部分代数とする. root 系を Δ で表し, positive root 全体, simple root 全体のなす集合をそれぞれ Δ^+ , $\{\alpha_i\}_{i \in I_0}$ とする. ここで I_0 は index set である. また Weyl 群を W で表し, w_0 をその最長元とする. $i \in I_0$ に対応する simple coroot, simple reflection をそれぞれ $h_i \in \mathfrak{h}$, $s_i \in W$ で表す. \mathfrak{g} の包絡環 $U(\mathfrak{g})$ 上の反代数射 $x \mapsto {}^t x$ を ${}^t h_i = h_i$, ${}^t x_\alpha = x_{-\alpha}$ により定める. ここで $\{x_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ は Chevalley basis である.

可換放物型概均質ベクトル空間は以下のようにして実現される. I_0 の部分集合 I に対し

$$\Delta_I = \Delta \cap \sum_{i \in I} \mathbb{Z} \alpha_i, \quad \mathfrak{l}_I = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta_I} \mathfrak{g}_\alpha \right), \quad \mathfrak{n}_I^\pm = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_I} \mathfrak{g}_{\pm \alpha}, \quad W_I = \langle s_i \mid i \in I \rangle$$

とする. また L_I を \mathfrak{l}_I に対応する代数群とする. 以下 I は $\mathfrak{n}_I^+ \neq \{0\}$, $[\mathfrak{n}_I^+, \mathfrak{n}_I^+] = 0$ となるもののみを考える. この条件は次と同値である:

$$I = I_0 \setminus \{i_0\}$$

(i_0 は \mathfrak{g} の highest root $\theta = \sum_{i \in I_0} m_i \alpha_i$ において $m_{i_0} = 1$ となるもの).

このとき $(L_I, \text{Ad}, \mathfrak{n}_I^+)$ が可換放物型と呼ばれる概均質ベクトル空間である. その座標環を $\mathbb{C}[\mathfrak{n}_I^+]$ で表す. Killing 形式により $(\mathfrak{n}_I^+)^* \simeq \mathfrak{n}_I^-$ なので, $\mathbb{C}[\mathfrak{n}_I^+]$ は $S(\mathfrak{n}_I^-) = U(\mathfrak{n}_I^-)$ と同一視される.

\mathfrak{n}_I^+ の L_I -orbit は有限個でそれらを $C_1, C_2, \dots, C_r, C_{r+1}$ とする. ここで index は closure relation

$$\{0\} = C_1 \subset \overline{C_2} \subset \dots \subset \overline{C_r} \subset \overline{C_{r+1}} = \mathfrak{n}_I^+$$

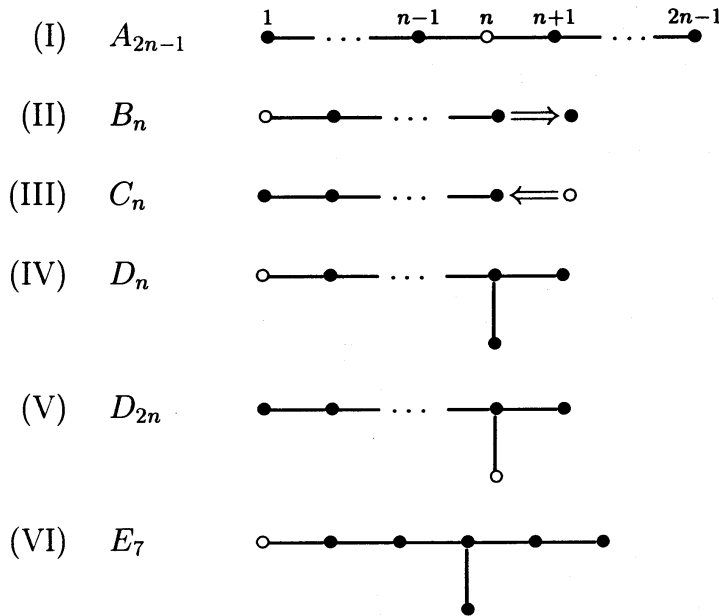


図 1

をみたすようにつける ($\bar{*}$ は Zariski closure である). $1 \leq p \leq r$ に対し, $\overline{C_p}$ の定義イデアルを $\mathcal{I}(C_p)$ とし, その m 次斉次部分を $\mathcal{I}^m(C_p)$ とする. このとき次のことが知られている ([21]):

- (i) $\mathcal{I}^m(C_p) = 0$ ($m < p$).
- (ii) $\mathcal{I}^p(C_p)$ は既約 \mathfrak{l}_I 加群.
- (iii) $\mathcal{I}(C_p) = \mathbb{C}[\mathfrak{n}_I^+] \mathcal{I}^p(C_p)$.

f_p を $\mathcal{I}^p(C_p)$ の highest weight vector とし, その weight を λ_p とする. 概均質ベクトル空間 (L_I, \mathfrak{n}_I^+) が正則のとき, orbit C_r に対応する highest weight vector f_r が基本相対不変式であり, その weight は $\lambda_r = -2\varpi_{i_0}$ となる. ただし ϖ_{i_0} は α_{i_0} に対応する基本 weight である. (L_I, \mathfrak{n}_I^+) が正則となるような \mathfrak{g} と i_0 は図 1 の Dynkin diagram で与えられる (頂点 \circ が i_0 に対応している).

正則概均質ベクトル空間 (L_I, \mathfrak{n}_I^+) の b 関数は次のように定義される. \mathfrak{n}_I^+ の non-open orbit の個数を r とし, $f_r \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}_I^+]$ を上のようにとる. $h \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}_I^-] \simeq S(\mathfrak{n}_I^+)$ に対して定数係数微分作用素 $h(\partial)$ を

$$h(\partial) \exp(x, y) = h(y) \exp(x, y) \quad (x \in \mathfrak{n}_I^+, y \in \mathfrak{n}_I^-)$$

により定める. ここで $(,)$ は Killing 形式である. 基本相対不変式 f_r に対して

$${}^t f_r(\partial) f_r^{s+1} = b_r(s) f_r^s \quad (s \in \mathbb{C})$$

となる多項式 b_r が存在する. この b_r が f_r の b 関数であり, その次数は r である.

図 1 の各場合においてその b 関数は次のようになる:

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & b_r(s) = (s+1)(s+2)\cdots(s+n) & (r=n) \\
 \text{(II)} \quad & b_r(s) = (s+1) \left(s + \frac{2n-1}{2} \right) & (r=2) \\
 \text{(III)} \quad & b_r(s) = (s+1) \left(s + \frac{3}{2} \right) \left(s + \frac{4}{2} \right) \cdots \left(s + \frac{n+1}{2} \right) & (r=n) \\
 \text{(IV)} \quad & b_r(s) = (s+1) \left(s + \frac{2n-2}{2} \right) & (r=2) \\
 \text{(V)} \quad & b_r(s) = (s+1)(s+3)\cdots(s+2n-1) & (r=n) \\
 \text{(VI)} \quad & b_r(s) = (s+1)(s+5)(s+9) & (r=3)
 \end{aligned}$$

ここで $\mathbb{C}[\mathfrak{n}_I^+] \simeq S(\mathfrak{n}_I^-)$ 上の非退化対称形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を次で定義する:

$$\langle f, g \rangle = ({}^t g(\partial) f)(0).$$

このとき, $f, g, h \in S(\mathfrak{n}_I^-)$ に対して

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \langle \text{ad}(u)f, g \rangle = \langle f, \text{ad}({}^t u)g \rangle \quad (u \in U(\mathfrak{l}_I)), \\
 \text{(ii)} \quad & \langle f, gh \rangle = \langle {}^t g(\partial)f, h \rangle, \\
 \text{(iii)} \quad & \langle x_{-\beta}, x_{-\beta'} \rangle = \delta_{\beta, \beta'} \frac{2}{(\beta, \beta)} \quad (\beta, \beta' \in \Delta^+ \setminus \Delta_I), \\
 \text{(iv)} \quad & \langle fg, h \rangle = \langle f \otimes g, \Delta(h) \rangle
 \end{aligned}$$

となることがわかる. ただし $\Delta : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ は $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ ($x \in \mathfrak{g}$) で定まる $U(\mathfrak{g})$ の余積である.

注 1.1. 一般に上の (i) をみたす対称形式に関し, $S(\mathfrak{n}_I^-)$ の同型でない既約部分 \mathfrak{l}_I 加群は互いに直交する. また各既約部分加群上では (i) をみたすものはスカラー倍を除いて一意である. 今, $\sum_{\beta \in \Delta^+ \setminus \Delta_I} \mathbb{C}x_{-\beta}$ は既約部分加群なので (i), (iii), (iv) をみたす対称形式は一意的に決まり, 非退化性により (ii) から ${}^t g(\partial)$ を定義することができる. 同様に §4 で ${}^t g(\partial)$ の q 類似を定義する.

§2. 量子包絡環

この節では量子包絡環に関する準備をする. 以下 $(\alpha, \alpha) = 2$ (α : short root) とし, $i, j \in I_0$ に対し

$$d_i = \frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{2}, \quad a_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

と定める.

\mathfrak{g} の量子包絡環 $U_q(\mathfrak{g})$ は $E_i, F_i, K_i^{\pm 1}$ ($i \in I_0$) で生成され, 以下の基本関係式をもつ $\mathbb{C}(q)$ 上の結合代数である:

$$\begin{aligned} K_i K_j &= K_j K_i, & K_i K_i^{-1} &= K_i^{-1} K_i = 1, \\ K_i E_j K_i^{-1} &= q_i^{a_{ij}} E_j, & K_i F_j K_i^{-1} &= q_i^{-a_{ij}} F_j, \\ E_i F_j - F_j E_i &= \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}, \\ \sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{q_i} E_i^{1-a_{ij}-s} E_j E_i^s &= 0 \quad (i \neq j), \\ \sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{q_i} F_i^{1-a_{ij}-s} F_j F_i^s &= 0 \quad (i \neq j). \end{aligned}$$

ここで $q_i = q^{d_i}$, $[m]_t = \frac{t^m - t^{-m}}{t - t^{-1}}$, $[m]_t! = \prod_{s=1}^m [s]_t$, $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_t = \frac{[m]_t!}{[n]_t! [m-n]_t!}$ である.

$U_q(\mathfrak{g})$ 上の反代数射 $x \mapsto {}^t x$ を次で定める:

$${}^t K_\mu = K_\mu, \quad {}^t E_i = F_i, \quad {}^t F_i = E_i.$$

ただし $\mu = \sum_i m_i \alpha_i$ に対し, $K_\mu = \prod_i K_i^{m_i}$ とする.

$U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数 $U_q(\mathfrak{b}^\pm)$, $U_q(\mathfrak{h})$, $U_q(\mathfrak{n}^\pm)$ を次のように定める:

$$\begin{aligned} U_q(\mathfrak{b}^+) &= \langle E_i, K_i^{\pm 1} \mid i \in I_0 \rangle, & U_q(\mathfrak{b}^-) &= \langle F_i, K_i^{\pm 1} \mid i \in I_0 \rangle, & U_q(\mathfrak{h}) &= \langle K_i^{\pm 1} \mid i \in I_0 \rangle, \\ U_q(\mathfrak{n}^+) &= \langle E_i \mid i \in I_0 \rangle, & U_q(\mathfrak{n}^-) &= \langle F_i \mid i \in I_0 \rangle. \end{aligned}$$

本稿では $U_q(\mathfrak{g})$ の Hopf 代数構造を

$$\begin{aligned} \Delta(K_i) &= K_i \otimes K_i, & \Delta(E_i) &= E_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes E_i, & \Delta(F_i) &= F_i \otimes 1 + K_i \otimes F_i, \\ \epsilon(K_i) &= 1, & \epsilon(E_i) &= \epsilon(F_i) = 0, \\ S(K_i) &= K_i^{-1}, & S(E_i) &= -E_i K_i, & S(F_i) &= -K_i^{-1} F_i, \end{aligned}$$

により定める. また, 随伴表現 $\text{ad} : U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}(q)}(U_q(\mathfrak{g}))$ を Hopf 代数構造を用いて

$$\text{ad}(x)y = \sum_i x_i^{(1)} y S(x_i^{(2)}) \quad (\Delta(x) = \sum_i x_i^{(1)} \otimes x_i^{(2)})$$

により定義する. $U_q(\mathfrak{h})$ の随伴作用による $U_q(\mathfrak{n}^-)$ の weight μ に対応する weight space を $U_q(\mathfrak{n}^-)_\mu$ で表す.

Lusztig により $U_q(\mathfrak{g})$ の自己同型 T_i ($i \in I_0$) が次のように定義された ([11]):

$$\begin{aligned} T_i(K_j) &= K_j K_i^{-a_{ij}}, \\ T_i(E_j) &= \begin{cases} -F_i K_i & (i = j) \\ \sum_{k=0}^{-a_{ij}} (-q_i)^{-k} E_i^{(-a_{ij}-k)} E_j E_i^{(k)} & (i \neq j), \end{cases} \\ T_i(F_j) &= \begin{cases} -K_i^{-1} E_i & (i = j) \\ \sum_{k=0}^{-a_{ij}} (-q_i)^k F_i^{(k)} F_j F_i^{(-a_{ij}-k)} & (i \neq j). \end{cases} \end{aligned}$$

ここで $E_i^{(k)} = \frac{1}{[k]_{q_i}!} E_i^k$, $F_i^{(k)} = \frac{1}{[k]_{q_i}!} F_i^k$ である.

注 2.1. T_i は Lie 代数では

$$\tilde{s}_i(x) = \exp(\text{ad } x_{\alpha_i}) \exp(-\text{ad } x_{-\alpha_i}) \exp(\text{ad } x_{\alpha_i})(x)$$

に対応するものである.

この自己同型を用いて PBW 型の基底が構成できる. また $w \in W$ の最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_t}$ に対して, 自己同型 T_w を $T_w = T_{i_1} \cdots T_{i_t}$ と定める. これは w の最短表示のとり方に依存しない.

以下の条件を満たす双線形形式 $(,) : U_q(\mathfrak{b}^-) \times U_q(\mathfrak{b}^+) \rightarrow \mathbb{C}(q)$ が一意的に存在することが知られている ([4], [20]):

$$\begin{aligned} (y, xx') &= (\Delta(y), x' \otimes x), & (yy', x) &= (y \otimes y', \Delta(x)), \\ (K_i, K_j) &= q^{-(\alpha_i, \alpha_j)}, & (F_i, E_j) &= -\delta_{ij} (q_i - q_i^{-1})^{-1}, \\ (F_i, K_j) &= 0, & (K_i, E_j) &= 0. \end{aligned}$$

ただし, $(y_1 \otimes y_2, x_1 \otimes x_2) = (y_1, x_1)(y_2, x_2)$ である.

また $y \in U_q(\mathfrak{n}^-)_{-\mu}$ に対し $r'_i(y) \in U_q(\mathfrak{n}^-)_{-(\mu-\alpha_i)}$ を次で定義する ([4]):

$$\Delta(y) \in K_\mu \otimes y + \sum_{i \in I_0} K_{\mu-\alpha_i} F_i \otimes r'_i(y) + \left(\bigoplus_{\substack{0 < \nu \leq \mu \\ \nu \neq \alpha_i}} K_{\mu-\nu} U_q(\mathfrak{n}^-)_{-\nu} \otimes U_q(\mathfrak{n}^-)_{-(\mu-\nu)} \right).$$

このとき

$$(y, xE_i) = (F_i, E_i)(r'_i(y), x) \quad (x \in U_q(\mathfrak{n}^+)), \quad (2.1)$$

$$r'_i(y_1 y_2) = y_1 r'_i(y_2) + q_i^{\mu_2(h_i)} r'_i(y_1) y_2 \quad (y_i \in U_q(\mathfrak{n}^-)_{-\mu_i}) \quad (2.2)$$

となる.

§3. 座標環の q 類似

(L_I, \mathfrak{n}_I^+) を可換放物型概均質ベクトル空間とし, $I = I_0 \setminus \{i_0\}$ とする. \mathfrak{n}_I^+ の non-open orbit を C_1, \dots, C_r とする (以下, 記号は §1 に従う). この節では, [8] による座標環 $\mathbb{C}[\mathfrak{n}_I^+]$ と基本相対不変式の q 類似の構成法について述べる.

$U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数 $U_q(\mathfrak{l}_I), U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ を次で定義する.

$$U_q(\mathfrak{l}_I) = \langle E_i, F_i, K_j^\pm \mid i \in I, j \in I_0 \rangle,$$

$$U_q(\mathfrak{n}_I^-) = U_q(\mathfrak{n}^-) \cap T_{w_I}^{-1} U_q(\mathfrak{n}^-).$$

ここで w_I は Weyl 群の部分群 W_I の最長元である.

$w_I w_0$ の最短表示 $w_I w_0 = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ に対して

$$\beta_t = s_{i_1} \cdots s_{i_{t-1}}(\alpha_{i_t}), \quad Y_{\beta_t} = T_{i_1} \cdots T_{i_{t-1}}(F_{i_t}) \quad (1 \leq t \leq k)$$

とおく. このとき次が成り立つ.

命題 3.1. (i) $\text{ad}(U_q(\mathfrak{l}_I)) U_q(\mathfrak{n}_I^-) \subset U_q(\mathfrak{n}_I^-)$.

(ii) $\Delta^+ \setminus \Delta_I = \{\beta_t \mid 1 \leq t \leq k\}$ であり, $\{Y_{\beta_1}^{n_1} \cdots Y_{\beta_k}^{n_k} \mid n_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ は $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ の基底をなす.

(iii) Y_β ($\beta \in \Delta^+ \setminus \Delta_I$) は $w_I w_0$ の最短表示のとり方によらずに定まり, $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ の生成元として 2 次斉次基本関係式をみたす.

命題 3.1 により $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ を $\mathbb{C}[\mathfrak{n}_I^+]$ の q 類似とみなすことができる.

線形写像 r'_{i_0} は $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ 上では次のようになる.

補題 3.2. $\beta \in \Delta^+ \setminus \Delta_I$ に対し $r'_{i_0}(Y_\beta) = \delta_{\alpha_{i_0}, \beta}$.

特に式(2.2)により, $r'_{i_0} \in \text{End}_{\mathbb{C}(q)}(U_q(\mathfrak{n}_I^-))$ となる.

f を $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ の weight vector とし, その weight を $\mu = -\sum_{i \in I_0} m_i \alpha_i$ ($m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) とする. このとき

$$f \in \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_{m_{i_0}} \in \Delta^+ \setminus \Delta_I} \mathbb{C}(q) Y_{\gamma_1} \cdots Y_{\gamma_{m_{i_0}}}$$

となり, f は $\deg f = m_{i_0}$ となる斉次元である.

次に基本相対不変式の q 類似を構成する. $\mathbb{C}[\mathfrak{n}_I^+]$ が multiplicity free \mathfrak{l}_I 加群であることより, その部分 \mathfrak{l}_I 加群である $\overline{C_p}$ の定義イデアル $I(C_p)$ とその生成系 $\mathcal{I}^p(C_p)$ の q 類似が $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ の部分 $U_q(\mathfrak{l}_I)$ 加群として一意に存在することがわかる. その q 類似をそれぞれ $\mathcal{I}_q(C_p)$, $\mathcal{I}_q^p(C_p)$ とおく. このとき

$$\mathcal{I}_q(C_p) = U_q(\mathfrak{n}_I^-) \mathcal{I}_q^p(C_p) = \mathcal{I}_q^p(C_p) U_q(\mathfrak{n}_I^-) \quad (3.1)$$

となる ([8]). また $f_{q,p}$ を $\mathcal{I}_q^p(C_p)$ の highest weight vector とすると, $\deg f_{q,p} = p$ である. 特に (L_I, \mathfrak{n}_I^+) が正則のとき, $f_{q,r}$ が基本相対不変式 f_r の q 類似とみなせる.

例 3.3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2n}$ とし, その simple root の index set I_0 を図 1 (I) により定める. このとき

$$\mathfrak{l}_I \simeq \{(g_1, g_2) \in \mathfrak{gl}_n \times \mathfrak{gl}_n \mid \text{tr} g_1 + \text{tr} g_2 = 0\}, \quad \mathfrak{n}_I^+ \simeq M_n(\mathbb{C})$$

であり, non-open orbit の個数 r は n となる. また基本相対不変式は $f_n(x) = \det x$ となる (一般に $C_p = \{x \in M_n(\mathbb{C}) \mid \text{rank} x = p-1\}$ である). この q 類似は次のようになる. $1 \leq i, j \leq n$ に対して $\beta_{ij} \in \Delta^+ \setminus \Delta_I$ を $\beta_{ij} = \alpha_{n-i+1} + \cdots + \alpha_n + \cdots + \alpha_{n+j-1}$ とし, $Y_{\beta_{ij}}$ を単に Y_{ij} と書くこととする. このとき $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ は生成元 Y_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) と基本関係式

$$Y_{ij} Y_{kl} = \begin{cases} q Y_{kl} Y_{ij} & (i < k, j = l \text{ または } i = k, j < l) \\ Y_{kl} Y_{ij} & (i < k, j > l) \\ Y_{kl} Y_{ij} + (q - q^{-1}) Y_{kj} Y_{il} & (i < k, j < l) \end{cases}$$

をもつ $\mathbb{C}(q)$ 代数である ($U_q(\mathfrak{l}_I)$ の随伴作用は省略). ここで $1 \leq p \leq n$ とし, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$, $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq n$ に対し

$$g(i_1, \dots, i_p | j_1, \dots, j_p) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (-q)^{\ell(\sigma)} Y_{i_1, j_{\sigma(1)}} \cdots Y_{i_p, j_{\sigma(p)}}$$

とおく. ただし $\ell(\sigma) = \#\{(i, j) | i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}$ である. このとき $\mathcal{I}_q^p(C_p) = \sum \mathbb{C}(q)g(i_1, \dots, i_p | j_1, \dots, j_p)$ であり, f_p の q 類似は

$$f_{q,p} = g(1, 2, \dots, p | 1, 2, \dots, p) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (-q)^{\ell(\sigma)} Y_{1,\sigma(1)} \cdots Y_{p,\sigma(p)}$$

となる. とくに q 行列式 $f_{q,n}$ が基本相対不変式の q 類似となる (他の場合の q 類似の具体形については [6], [13] を参照).

§4. b 関数の q 類似

以下 (L_I, \mathfrak{n}_I^+) は正則概均質ベクトル空間とする. この節では §1 で定義した $\mathbb{C}[\mathfrak{n}_I^+]$ 上の非退化対称形式 \langle, \rangle の q 類似を用いて b 関数の q 類似を構成する.

$U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ 上の双線形形式 \langle, \rangle_q を weight vector f, g に対して

$$\langle f, g \rangle_q = (q^{-1} - q)^{\deg f} \langle f, {}^t g \rangle$$

により定める. ここで $(,)$ は §2 の $U_q(\mathfrak{b}^-) \times U_q(\mathfrak{b}^+)$ 上の双線形形式である. $(,)$ の性質により次のことが成り立つ.

命題 4.1. (i) \langle, \rangle_q は対称非退化.

(ii) $\langle \text{ad}(u)f, g \rangle_q = \langle f, \text{ad}({}^t u)g \rangle_q \quad (u \in U_q(\mathfrak{l}_I)).$

(iii) $\langle Y_\beta, Y_{\beta'} \rangle_q = \delta_{\beta, \beta'} \left[\frac{(\beta, \beta)}{2} \right]_q^{-1} \quad (\beta, \beta' \in \Delta^+ \setminus \Delta_I).$

(iv) $\langle fg, h \rangle_q = \langle f \otimes g, \tilde{\Delta}(h) \rangle_q.$

ここで $\tilde{\Delta}$ は余積 Δ と反代数射 ${}^t \cdot$ とある射影により $\tilde{\Delta}(U_q(\mathfrak{n}_I^-)) \subset U_q(\mathfrak{n}_I^-) \otimes U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ をみたすように定義され, $q = 1$ では $S(\mathfrak{n}_I^-)$ 上の余積となるものである.

命題 4.1 により \langle, \rangle_q を \langle, \rangle の q 類似とみなすことができる.

命題 4.2. $g \in U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ に対して

$$\langle {}^t g(\partial)f, h \rangle_q = \langle f, gh \rangle_q \quad (f, h \in U_q(\mathfrak{n}_I^-))$$

となる ${}^t g(\partial) \in \text{End}_{\mathbb{C}(q)}(U_q(\mathfrak{n}_I^-))$ が一意的に存在する.

証明. 一意性は非退化性より明らかである. 以下, 存在性を示す. これは $g = Y_\beta$ ($\beta \in \Delta^+ \setminus \Delta_I$) で示せば十分である. $\beta = \alpha_{i_0}$ のとき, $Y_\beta = F_{i_0}$ だから式 (2.1) より ${}^t Y_\beta(\partial) = [d_{i_0}]_q^{-1} r'_{i_0}$ とすればよい. $\beta > \alpha_{i_0}$ のとき, $Y_\beta = c \text{ad}(F_i) Y_{\beta'}$ ($\beta' = \beta - \alpha_i$) となる $i \in I$ と $c \in \mathbb{C}(q)$ が存在する. このとき ${}^t Y_\beta(\partial) = c \left({}^t Y_{\beta'}(\partial) \text{ad}(E_i) - q_i^{\beta'(h_i)} {}^t Y_{\beta'}(\partial) \text{ad}(E_i) \right)$ と帰納的に定めればよい. \square

$f, g \in U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ がそれぞれ weight μ, ν をもつ weight vector のとき, ${}^t g(\partial)f$ の weight は定義より $\mu - \nu$ となる. 特に ${}^t f_{q,r}(\partial)f_{q,r}^{s+1}$ ($s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) の weight は $s\lambda_r (= -2s\varpi_{i_0})$ である.

補題 4.3. $i \in I$ に対し,

$${}^t f_{q,r}(\partial) \operatorname{ad}(E_i) = \operatorname{ad}(E_i) {}^t f_{q,r}(\partial), \quad {}^t f_{q,r}(\partial) \operatorname{ad}(F_i) = \operatorname{ad}(F_i) {}^t f_{q,r}(\partial).$$

証明. $y \in U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ に対し $\operatorname{ad}(E_i)(f_{q,r}y) = f_{q,r}\operatorname{ad}(E_i)y$, $\operatorname{ad}(F_i)(f_{q,r}y) = f_{q,r}\operatorname{ad}(F_i)y$ となることと命題 4.1 (ii) を使えばよい. \square

これより ${}^t f_{q,r}(\partial)f_{q,r}^{s+1}$ は highest weight vector であることが従う. 今, $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ は multiplicity free だから

$${}^t f_{q,r}(\partial)f_{q,r}^{s+1} = \tilde{b}_{q,r,s} f_{q,r}^s$$

となる $\tilde{b}_{q,r,s} \in \mathbb{C}(q)$ が存在する. ${}^t Y_\beta(\partial)$ が r'_{i_0} や $\operatorname{ad}(E_i)$ ($i \in I$) で表されることに注意すると $\tilde{b}_{q,r}(q_{i_0}^s) = \tilde{b}_{q,r,s}$ となる多項式 $\tilde{b}_{q,r}(t) \in \mathbb{C}(q)[t]$ が存在することがわかる. 以下 $\tilde{b}_{q,r}(q_{i_0}^s)$ を単に $b_{q,r}(s)$ と書くことにする.

定理 4.4. 正則概均質ベクトル空間 (L_I, \mathfrak{n}_I^+) の基本相対不変式 f_r に対する b 関数を $b_r(s) = \prod_{j=1}^r (s + a_j)$ とする. このときその q 類似は (定数倍を除いて)

$$b_{q,r}(s) = \prod_{j=1}^r q_{i_0}^{s+a_j-1} [s + a_j]_{q_{i_0}}$$

とかける.

注 4.5. B, C 型では $a_j \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$ であるが, この場合では $q_{i_0} = q^2$ なので定理の $q_{i_0}^{s+a_j-1}$ や $[s + a_j]_{q_{i_0}}$ は $\mathbb{C}(q)$ 内で定義される.

定理 4.4 は各 type 毎に $b_{q,r}$ を計算することによって示される. 次節でその計算法を簡単に述べる.

§5. $b_{q,r}(s)$ の計算

命題 5.1. $f_{q,r}$ は $U_q(\mathfrak{n}^-)$ の center の元である. 特に $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ の center の元である.

証明. $i \in I$ に対し $[F_i, f_{q,r}] = \text{ad}(F_i)f_{q,r} = 0$ である. よって $[F_{i_0}, f_{q,r}] = 0$ を示せばよい. 式 (3.1) より $F_{i_0}f_{q,r} = cf_{q,r}F_{i_0}$ となる $c \in \mathbb{C}(q)$ が存在する. 一方, $r'_{i_0}(Y_\beta) = \delta_{\beta, \alpha_{i_0}}$ に注意すると $r'_{i_0}{}^2(F_{i_0}f_{q,r}) = r'_{i_0}{}^2(f_{q,r}F_{i_0}) = (q_{i_0}^2 + 1)r'_{i_0}(f_{q,r}) (\neq 0)$ となることがわかり, $(q_{i_0}^2 + 1)r'_{i_0}(f_{q,r}) = c(q_{i_0}^2 + 1)r'_{i_0}(f_{q,r})$ となる. したがって $c = 1$ である. \square

$f_{q,r}$ が highest weight vector であることより $\beta \in \Delta^+ \setminus \Delta_I, y \in U_q(\mathfrak{n}_I^-)_{-\mu}$ に対して

$${}^tY_\beta(\partial)(f_{q,r}^n y) = q^{(\beta, \mu)} {}^tY_\beta(\partial)(f_{q,r}^n) y + f_{q,r}^n {}^tY_\beta(\partial)y \quad (5.1)$$

となることが示され, 特に命題 5.1 より次が従う:

$${}^tY_\beta(\partial)(f_{q,r}^n) = q_{i_0}^{n-1} [n]_{q_{i_0}} f_{q,r}^{n-1} {}^tY_\beta(\partial)f_{q,r}. \quad (5.2)$$

上の結果を用いて b 関数の q 類似を次のようにして計算する.

一般に L_I -orbit C_p に対応する highest weight vector f_p はある可換放物型概均質ベクトル空間 $(L_{(p)}, \mathfrak{n}_{(p)}^+)$ の基本相対不変式になっており, $f_{q,p}$ はその q 類似である $((L_{(p)}, \mathfrak{n}_{(p)}^+)$ の構成は [22], [23] を参照). $f_{q,p}$ の量子 b 関数を $b_{q,p}$ で表す.

まず $b_{q,1}$ を求める. $(L_{(1)}, \mathfrak{n}_{(1)}^+)$ は A_1 型に付随する概均質ベクトル空間であり, $f_{q,1} = cF_{i_0}$ ($c \in \mathbb{C}(q)^*$) とかけるので

$${}^t f_{q,1}(\partial)f_{q,1}^{s+1} = c^{s+2} [d_{i_0}]_q^{-1} r'_{i_0}(F_{i_0}^{s+1}) = c^2 [d_{i_0}]_q^{-1} q_{i_0}^s [s+1]_{q_{i_0}} f_{q,1}^s$$

となり, $b_{q,1}(s) = c^2 [d_{i_0}]_q^{-1} q_{i_0}^s [s+1]_{q_{i_0}}$ である.

次に $2 \leq p \leq r$ とし, $b_{q,p}$ を $b_{q,p-1}$ で表すことを考える. 定義より $\langle f_{q,p}^{s+1}, f_{q,p}^{s+1} \rangle_q = b_{q,p}(s) \langle f_{q,p}^s, f_{q,p}^s \rangle_q$ だから $\langle f_{q,p}^s, f_{q,p}^s \rangle_q$ と $\langle f_{q,p-1}^s, f_{q,p-1}^s \rangle_q$ を比較すればよい.

補題 5.2. $2 \leq p \leq r$ とすると以下の条件をみたす $\beta_{p,j} \in \Delta^+ \setminus \Delta_I, u_{p,j} \in U_q(\mathfrak{l}_I) \cap U_q(\mathfrak{n}^-)$ が存在する.

$$(C1): f_{q,p} = \sum_j Y_{\beta_{p,j}} \text{ad}(u_{p,j}) f_{q,p-1}.$$

$$(C2): {}^tY_{\beta_{p,j}}(\partial)f_{q,p} = c_{p,j} \text{ad}(u_{p,j}) f_{q,p-1} \quad (c_{p,j} \in \mathbb{C}(q)).$$

$$(C3): {}^tY_{\beta_{p,j}}(\partial)f_{q,p-1} = 0.$$

命題 4.1 (ii), 式(5.1), (5.2), 補題 5.2 を使うと, $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $\langle f_{q,p}^s, f_{q,p}^s \rangle_q = c_p(s) \langle f_{q,p-1}^s, f_{q,p-1}^s \rangle_q$ となる $c_p(s) \in \mathbb{C}(q)$ を計算することができる (詳細は [7] を参照). このとき

$$b_{q,p}(s) = \frac{c_p(s+1)}{c_p(s)} b_{q,p-1}(s)$$

となり, 量子 b 関数 $b_r(s)$ が帰納的に求まる.

例 5.3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2n}$ のときを考えると. $(L_{(p)}, \mathfrak{n}_{(p)}^+)$ はまた A 型に付随する概均質ベクトル空間であり, その座標環の q 類似 $U_{q,p}$ は Y_{ij} ($1 \leq i, j \leq p$) で生成される $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ の部分代数である. ここで $\text{root } \alpha_i, \beta_{ij}$ や $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ の元 Y_{ij} , $f_{q,p}$ は例 3.3 で定めたものとする. $d_{i_0} = d_n = 1$, $q_{i_0} = q_n = q$, $f_{q,1} = F_n$ だから $b_{q,1}(s) = q^s [s+1]_q$ である. また $f_{q,p}$ の分解 (C1) は

$$f_{q,p} = \sum_{k=1}^p (-q^{-1})^{p-k} Y_{p,k} \text{ad}(u_k) f_{q,p-1}$$

で与えられる. ここで $u_k = F_{n+k} F_{n+k+1} \cdots F_{n+p-1}$ である. これは行列式の余因子展開の q 類似である. また

$${}^t Y_{p,k}(\partial) f_{q,p} = (-q)^{p+k-2} \text{ad}(u_k) f_{q,p-1}$$

であることが容易に示せる. このとき

$$c_p(s) = q^{\frac{s(s+2p-3)}{2}} \prod_{i=1}^s [i+p-1]_p$$

となる. よって $b_{q,p}(s) = q^{s+p-1} [s+p]_q b_{q,p-1}(s)$ であり, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2n}$ のとき量子 b 関数 $b_{q,n}$ は

$$b_{q,n}(s) = \prod_{p=1}^n q^{s+p-1} [s+p]_q$$

となる (他の場合における $f_{q,p}$ の分解 (C1) や $c_p(s)$ の具体形は [7] を参照).

参考文献

- [1] V. G. Drinfel'd, Hopf algebra and the Yang-Baxter equation, *Soviet Math. Dokl.* **32** (1985), 254–258.
- [2] A. Gyoja, Highest weight modules and b -functions of semi-invariants, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **30** (1994), 353–400.
- [3] M. Hashimoto and T. Hayashi, Quantum multilinear algebra, *Tohoku Math. J.*, **44** (1992), 471–521.
- [4] J. C. Jantzen, *Lectures on quantum groups*, Graduate Studies in Mathematics, **6**, American Mathematical Society, 1995.

- [5] M. Jimbo, A q -difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* **10** (1985), 63–69.
- [6] A. Kamita, Quantum deformations of certain prehomogeneous vector spaces III, *Hiroshima Math. J.* **30** (2000), 79–115.
- [7] A. Kamita, Quantum b -functions of prehomogeneous vector spaces of commutative parabolic type, math. QA/0006209.
- [8] A. Kamita, Y. Morita and T. Tanisaki, Quantum deformations of certain prehomogeneous vector spaces I, *Hiroshima Math. J.* **28** (1998), 527–540.
- [9] T. Kimura, The b -functions and holonomy diagrams of irreducible regular prehomogeneous vector spaces, *Nagoya Math. J.* **85** (1982), 1–80.
- [10] G. Lusztig, Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras, *Adv. in Math.* **70** (1988), 237–249.
- [11] G. Lusztig, Quantum groups at roots of 1, *Geometriae Dedicata* **35** (1990), 89–114.
- [12] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Progress in Mathematics, Birkhäuser, Boston, 1993.
- [13] Y. Morita, Quantum deformations of certain prehomogeneous vector spaces II, *Osaka J. Math.* **37** (2000), 385–403.
- [14] M. Noumi, T. Umeda and M. Wakayama, A quantum analogue of the Capelli identity and an elementary differential calculus on $GL_q(n)$, *Duke Math. J.* **76** (1994), 567–594.
- [15] M. Noumi, H. Yamada and K. Mimachi, Finite dimensional representations of the quantum group $GL_q(n; \mathbb{C})$ and the zonal spherical functions, *Japan. J. Math.* , **19** (1993), 31–80.
- [16] T. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, *Nagoya Math. J.* **65** (1977), 1–155.
- [17] E. Strickland, Classical invariant theory for the quantum symplectic group, *Adv. Math.* **123** (1996), 78–90.

- [18] S. Suga, Highest weight modules associated with classical irreducible regular prehomogeneous vector spaces of commutative parabolic type, *Osaka J. Math.* **28** (1991), 323–346.
- [19] E. Taft and J. Towber, Quantum deformation of flag schemes and Grassmann schemes I, A q -deformation of the shape algebra for $GL(n)$, *J. Alg.* **142** (1991), 1–36.
- [20] T. Tanisaki, Killing forms, Harish-Chandra isomorphisms, and universal R -matrices for quantum algebras, in: *Infinite Analysis, Part B*, 941–961 (eds. A. Tsuchiya, T. Eguchi and M. Jimbo) Proc. Kyoto 1991 (Advanced Series in Mathematical Physics **16**), River Edge, N. J., 1992 (World Scientific)
- [21] T. Tanisaki, Highest weight modules associated to parabolic subgroups with commutative unipotent radicals, in: *Algebraic Groups and their Representations*, 73–90 (eds. R. W. Carter and J. Saxl) 1998 Kluwer Academic Publishers.
- [22] A. Wachi, Contravariant forms on generalized Verma modules and b -functions. *Hiroshima Math. J.* **29** (1999), 193–225.
- [23] N. R. Wallach, The analytic continuation of the discrete series. II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **251** (1979), 19–37.